Complement chapitre IV

Slide 4

$$f : E \longrightarrow E \qquad \text{une Application linéaire AL}$$
$$v \longrightarrow f(v)$$

1) Si $v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v) = O_E \;\Rightarrow f(v) = 0\, v \Rightarrow$

or $\forall v \in E \quad v.0 = O_E$

v est un $\vec{V}_p$ (vecteur propre) associé à la v_p

Valeur propre 0.

2) Soit $v \in E$ et v est un $\vec{V}_p$ de f. associé à la $v_p\, \lambda$

$$f(v) = \lambda v$$

Soit $u = \mu v \quad \mu \in \mathbb{R}$ alors $f(u) = f(\mu v) = \mu f(v)$ car f est AL

$$\Rightarrow f(u) = \mu(\lambda v) \underset{E \text{ st } EVR}{=\!=} \lambda(\mu v) = \lambda u.$$

donc $f(u) = \lambda u$.

Slide 5

$$M v = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Slide 6

$$f : E \longrightarrow E \qquad E = \mathbb{R}^2.$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x+3y, 2y)$$

$\{e_1, e_2\}$ B de E $\quad e_1 = (1,0) \quad e_2 = (0,1).$

$f(e_1) = (1,0) \quad f(e_2) = (3,2). = 3e_1 + 2e_2$
$= e_1$

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 0x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Slide 15

. On developpe suivant la 3e colonne.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 8 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 16\right] = (1-\lambda)(5-\lambda)(\lambda+3).$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 5 ; \lambda = -3.$$

Slide 16.

$\lambda = 1+\sqrt{2}$ $\quad$ st une racine double c'est valeur propre (V_p) de multiplicité 2 (dégénérée 2 fois)

$\lambda = 1-\sqrt{2}$ $\quad$ st racine simple c'st une V_p. de multiplicité 1. (non dégénérée)

Scanné avec CamScanner

Slide 18-19

$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A - \lambda \mathbb{1}| = 0 \Rightarrow \lambda = 5, -3, 1.$

Recherche des vect. propres $\vec{V}_p$.

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 8 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remplace λ par ses valeurs ex $\lambda = 5$

$$\begin{cases} -4x + 2y + 0z = 0 \\ 8x - 4y + 0z = 0 \\ 1x + 4y - 4z = 0. \end{cases}$$

des equations équivalentes $\Rightarrow 8x = 4y \Rightarrow y = 2x.$

$1x + 4(2x) - 4z = 0 \Rightarrow 9x = 4z \Rightarrow \boxed{x = \frac{4z}{9}}$

$y = 2x \Rightarrow \boxed{y = \frac{8z}{9}}$ et $\boxed{z = z}$ $(\forall z)$.

donc le $\vec{V}_p$ correspond à $\lambda = 5$ est $(x,y,z) = (\frac{4z}{9}, \frac{8z}{9}, z)$ soit on le représente

soit $(x,y,z) = z \underbrace{\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1\right)}_{V_p}$

colon $\begin{pmatrix} 4/9 \\ 8/9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

de même pour les 2 autres $V_p \neq -3$ et 1 on trouve.

$\lambda = -3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 4/7 \\ -8/7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Slide 21 – 23.

Pour le vp $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ on n'a pas de pb. On aura

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y + 0z = 0 \\ 1x - (1-\sqrt{2})y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 2\sqrt{2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = (1-\sqrt{2})y} \quad \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})y + y + 0\cdot z = 0 \Rightarrow 0\cdot y + 0z = 0$

$\forall y$ $\forall z$ cette dernière égalité est vérifiée.

donc le vecteur propre de f associé à le vp $(1+\sqrt{2})$ c'est

$(x, y, 0) = ((1+\sqrt{2})y, y, 0)$. Sol. sous forme colonne

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}\, y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$ le choix de val de y [illegible] est fig.

on peut choisir $y = 1$ [illegible].

on aura $$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le vp $= \lambda = 1+\sqrt{2}$ on a un pb car c'est vp de multiplicité 2.

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x + 1y + 0\cdot z = 0 \\ 1x - (1+\sqrt{2})y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = (1+\sqrt{2})y.}$$

$\Rightarrow (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})y + \cancel{y} + 0z = 0 \Rightarrow \boxed{0y + 0z = 0}$

relation vraie $\forall y$ $\forall z$. donc le vp s'écrit.

$(x, y, z) = ((1+\sqrt{2})y, y, z)$.

on la aura sous forme colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})y \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Nous donnons à y et z des valeurs arbitraires α et β

c.a.d $\quad y=\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$z=\beta \quad \beta \in \mathbb{R}$.

Mais pour a choisir $\beta=0$ et $\alpha=1$.

le premier vecteur sera alors donné par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour l'autre vecteur nous allons le choisir de telle manière que les 3 vecteurs sont LI (ou $\perp$), c.a.d que le déterminant formé par ces 3 vecteurs $\neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & (1+\sqrt{2})\alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta(-2\sqrt{2}).$$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\beta \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0$. on choisit $\boxed{\beta = 1}$

et on donne à α une valeur arbitraire la plus simple $\underline{\underline{0}}$

Soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.